|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Преобразование Фурье** | **Частота в герцах** | **Частота в радианах** |
| **Прямое преобразование** |  |  |
| **Обратное преобразование** |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Преобра-зование** | **Фурье**  **частота в герцах** | **Фурье  частота в радианах** | **Лапласа** |
| **Прямое преобра-зование** |  |  |  |
| **Обратное преобра-зование** |  |  |  |

Ряд Фурье. По теореме Фурье, любую периодическую функцию с периодом T можно разложить в ряд по гармоническим функциям:







Разложим в ряд Фурье решетчатую функцию Дирака:

, TД – период дискретизации







**Таблица основных преобразований Фурье:**

**Преобразование Фурье и дельта-функция**

По определению (из Википедии ☺):

 (\*)

Подставим *a = t, x = * тогда



Правая часть является обратным преобразованием Фурье от единицы.

Учитывая, что * = 2f*, *f =  / 2*



Получим обратное преобразование Фурье от единицы для частоты в Герцах

Подставим в (\*) *a = –, x = t* тогда





**Преобразование Фурье от константы**

Используем тождество:



**Преобразование Фурье sin(at)**







**Преобразование Фурье cos(t)**



**Преобразования Фурье решетчатой функции Дирака**

Используем разложение решетчатой функции в ряд Фурье





**Обратное преобразование Фурье функции с отрицательным аргументом**

*f*(*t*) → *F*(**)





введем замену t = –, dt = –d



т.е. *f*(–*t*) → *F*(–**)

**Равенство Парсеваля**



интеграл по (*–u*) равен *F1(-)*,



**Частный случай равенства Парсеваля *f1*(*t*) = *f2*(*t*) = *f*(*t*)**



*F*(**)·*F*(–**) = (*Re*(**) + *j Im*(**))(*Re*(–**) + *j Im*(–**)) = (*Re*(**) + *j Im*(**))(*Re*(**) – *j Im*(**)) =

= *Re2*(**) + *Im2*(**) – *j Re*(**)*Im*(**) + *j Im*(**)*Re*(**) = *Re2*(**) + *Im2*(**) = |*F*(**)|2

используется свойство четности *Re*(**) и нечетности *Im*(**)

**Преобразование Фурье произведения функций**



**Обратное преобразование Фурье от произведения функций в частотной области – свертка:**



Введем обозначения и воспользуемся равенством Парсеваля:

|  |  |
| --- | --- |
| *X1*(* *) = *F1*(**)exp(*j*)  *x1*(*t *) = *f1*(*t+*) | *X2*(–**) = *F2*(**); *X2*(**) = *F2*(–**)  *x2*(*t*) = *f2*(–*t*) |



введем переменную *u = –t*



с помощью замены *x =  – u* можно показать что



**Взаимнокорреляционная функция**



*f1*(*t*) → *F1*(**)

*f2*(*t*) → *F2*(**), *f2*(*t + *) → *F2*(**)exp(*j*)



замена **= *-u*:



**Преобразование Фурье функции Хевисайда (Единичный скачок)**





**Преобразование Фурье от функции с запаздыванием**



**Преобразование Фурье прямоугольной функции окна**













**Преобразование Фурье оконной функции Хэмминга**













**Финитное преобразование Фурье, т.е. преобразование Фурье сигнала конечной длительности. Можно трактовать как преобразование Фурье сигнала, умноженного на прямоугольную функцию окна**









Для примера рассчитаем полученную свертку для преобразования Фурье от функции sin(at)





**Преобразование Фурье сигнала, дискретизированного решетчатой функцией q(t)**

ТД – период дискретизации





Вывод: спектр дискретизированного сигнала является периодическим

**Преобразование Фурье дискретизированного сигнала конечной длительности (вывод формулы дискретного преобразования Фурье)**

Дискретизированный сигнал конечной длительности:



Найдем его преобразования Фурье:





С учетом связи частоты дискретизации со временем измерения и числом отсчетов: , получим:



Приняв обозначения , , получим формулу дискретного преобразования Фурье:



**X[k] – периодическая функция с периодом N**

