

Практика 3. Оценка дисперсии как случайная величина.

Часть 1. Распределение χ^2 .

1. Используя только нормальный генератор randn(), написать генератор СВ из распределения χ^2 с k степенями свободы.

function x = randchi2(k, n)

k – количество степеней свободы распределения χ^2

n – объем генерируемой выборки

x – вектор размерности n со случайными значениями из случайной величины χ^2

2. Выбрать количество степеней свободы $2 \leq k \leq 10$ и, используя написанный генератор, методом Монте-Карло сгенерировать достаточно большую выборку, построить ее полигон относительных частот (hist_density).
3. На том же графике построить теоретическую плотность распределения χ^2 с выбранным числом степеней свободы. Убедиться, что графики совпадают.

Часть 2. Оценка дисперсии как случайная величина

1. Задаться объемом исследуемой выборки $3 \leq n \leq 6$.
2. Задаться объемом выборки Монте-Карло $N > 1000$. Сгенерировать методом Монте-Карло выборку из нормального распределения N выборок объема n .
3. Сгенерировать N реализаций смещенной и несмещенной оценок дисперсий, рассчитанных по выборкам объема n . Построить полигон относительных частот обеих оценок. Визуально продемонстрировать наличие смещенности. Рассчитать средние значения обеих оценок N реализациям. Убедиться, что смещенная оценка действительно смещенная. В какую сторону происходит смещение?
4. На основе N реализаций несмещенной дисперсии построить столько же реализаций величины $(n-1) \frac{S^2}{D}$. Построить полигон относительных частот. Выяснить в лекциях теоретическую плотность распределения $(n-1) \frac{S^2}{D}$ и нанести ее на тот же график. Убедиться, что графики совпадают.

Вопросы к защите

1. Записать формулы:
 - a. оценки дисперсии при известном МО \hat{D} ,
 - b. смещенной оценка дисперсии при неизвестном МО \tilde{D} ,
 - c. несмещенной (исправленной) оценки дисперсии при неизвестном МО S^2 .
2. Свойство смещенности оценок
 - a. Что такое матожидание оценки дисперсии?
 - b. Дать определение несмещенности оценки.
 - c. Вывести МО оценки дисперсии при известном МО случайной величины
 - d. Вывести МО суммы квадратов $SS = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$
 - e. Пользуясь результатом вывода МО для суммы квадратов, вывести МО смещенной \tilde{D} и несмещенной S^2 оценок дисперсии при неизвестном МО случайной величины.
 - f. На основании выведенных МО обосновать вывод о смещенности/несмещенности всех трех оценок.
 - g. При каком объеме выборки проявляется смещенность смещенной оценки дисперсии \tilde{D} . Является ли смещенная оценка дисперсии \tilde{D} заниженной или завышенной
3. Дисперсия оценки дисперсии

- a. Что такое дисперсия оценки дисперсии? Какая величина дисперсии оценки дисперсии желательна: большая или малая?
 - b. Как увеличение дисперсии оценки дисперсии повлияет на полигон относительных частот оценок дисперсии?
 - c. От чего она зависит? Как достичь малой дисперсии оценки дисперсии?
4. Распределение оценки дисперсии как случайной величины:
- a. Определение распределения хи-квадрат с k степенями свободы.
 - b. Вывести распределение оценки дисперсии \hat{D} при известном истинном значении MO (связь с хи-квадрат)