

## Практика 8. Критерий МНК как функция коэффициентов регрессии в трехмерном пространстве

1. Взять оценки коэффициентов для **линейной** модели QN-характеристики из прошлой работы  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  и в **данной работе считать их истинными**  $(\beta_{ист})$ . Сгенерировать выборку объема  $n$  по модели с полученным  $\beta_{ист}$ . Задаться дисперсией шума и объемом выборки от 10 до 20.
2. Рассчитать МНК-оценки коэффициентов регрессии на основе аналитического решения задачи минимизации функционала качества. Расчет сделать функцией regress и по формуле:
$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$
3. Построить трехмерный график (surf) и график изолиний (contour) функционала качества МНК  $Q(\beta)$ . Отобразить точкой аналитическое решение (plot3). Убедиться, что точка лежит точно в минимуме.

### Вопросы к защите

1. Объяснение невязок между моделью и данными как реализаций случайного шума. Насосный агрегат является объектом с детерминированным поведением (при одинаковом расходе будет один и тот же дифнапор). Однако при сборе данных для одного заданного расхода могут получаться разные значения дифнапора насосного агрегата.
  - a. Указать конкретные причины, из-за которых появляется случайный разброс дифнапора для одного расхода. Привести по крайней мере 3 причины.
  - b. Пояснить, почему разброс носит случайный характер.
  - c. По какой причине разумно считать шум нормальной случайной величиной?
2. Вероятностная модель выборки до измерений.
  - a. Формы записи:
    - i. Скалярная, для каждого  $i$ -го элемента выборки
    - ii. Векторная, для каждого  $i$ -го элемента выборки
      1. Размерность вектора коэффициентов
      2. Размерность вектора факторов
    - iii. Векторная, для всех элементов выборки.
      1. Запись матрицы плана через вектор факторов
      2. **Для всех переменных указать размерности**
  - b. Нюансы
    - a. Вектор факторов
      - i. для задания линейной зависимости
      - ii. для задания полиномиальной зависимости
3. Восстановление коэффициентов регрессии по экспериментальным данным
  - a. Понятие регрессионного остатка. Расчет остатков в скалярном и векторном виде.
  - b. Функционал метода наименьших квадратов
    - i. Записать функционал МНК в скалярном и векторном виде
    - ii. Может ли функционал быть отрицательным? Может ли он быть равным нулю.
    - iii. В чем разница между  $\hat{\beta}$ ,  $\beta$ ,  $\beta_{ист}$ ?
    - iv. Графический вид функционала для линейного зависимости ( $k=2$ ) (эскиз трехмерного графика, эскиз графика изолиний)
    - v. Что происходит с остатками при достижении минимума функционала качества МНК?
    - vi. Что происходит с графиком регрессионной модели в осях исходных данных ( $Q$ ,  $H$ ) при достижении минимума функционала качества МНК?

- c. Формальная постановка задачи поиска оценок коэффициентов регрессии  $\hat{\beta}$  как задачи минимизации функционала (в векторном виде). Что дано, что требуется найти, за счет чего это достигается.
  - d. Аналитическое решение задачи поиска оптимальных оценок  $\hat{\beta}$ .
    - i. Что такое вектор-градиент?
    - ii. Вывод системы нормальных уравнений и ее решение
4. Расчет качества модели после измерений. Метрика R2