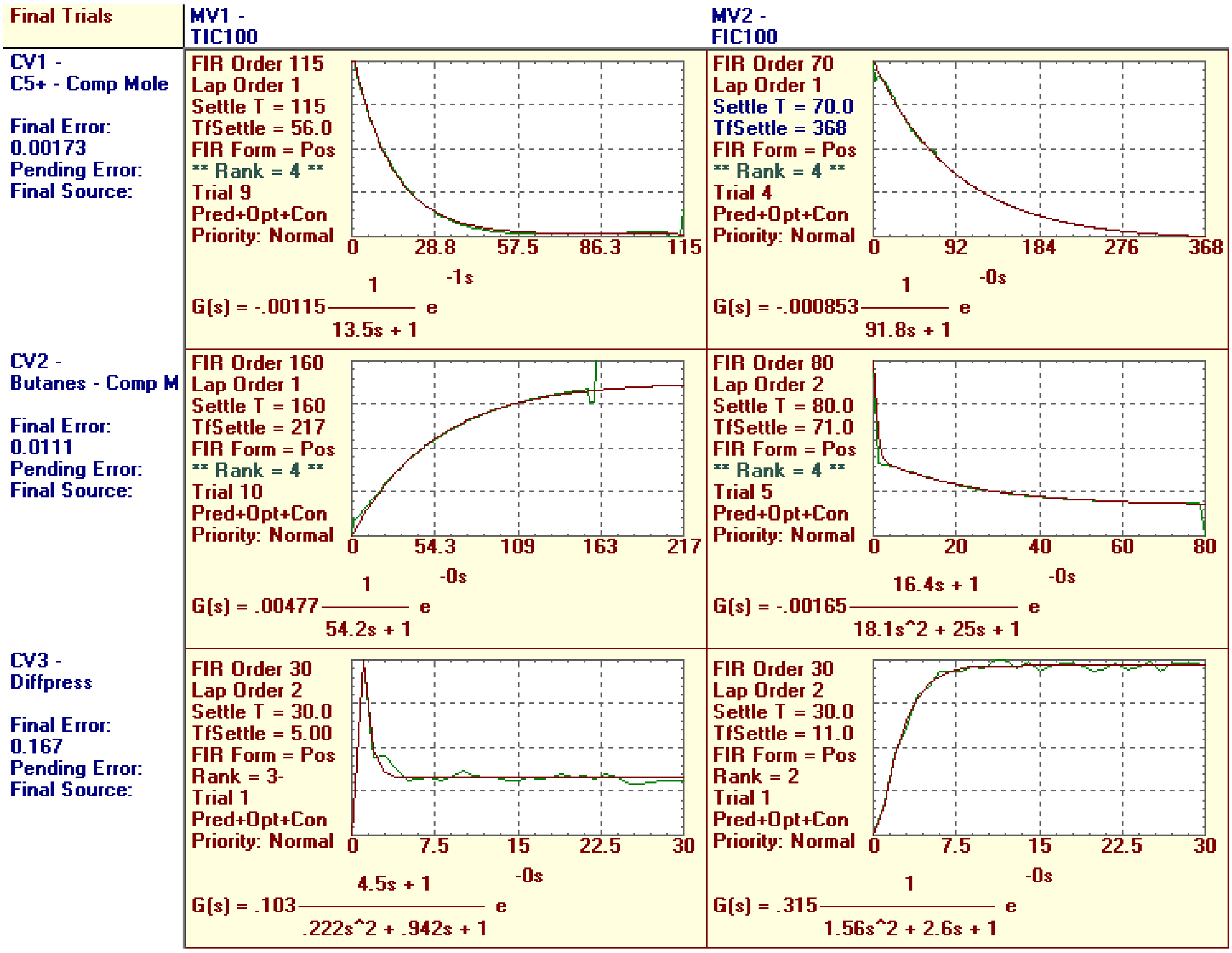
Лекция 1. Модели объектов в пространстве состояний.

1. Прогнозирующие модели MPC.
2. С точки зрения управления можно разделить объекты на SISO и MIMO. Для объектов типа MIMO появляется принципиально новая особенность – наличие многосвязности, т.е. влияние каждого из управляющих входов на каждый выход (т.е. все регулируемые величины). В общем случае все управляющие воздействия влияют на все регулируемые величины.
3. Аппарат передаточных функции прекрасно подходит под SISO. MPC – это про многосвязность. Для работы с многосвязными системами передаточные функции не подходят, т.к. передаточная функция – SISO. В случае MIMO надо использовать матрицы передаточных функций (можно скриншот из Profit Suite).



4. Кроме матрицы передаточных функций есть еще один аппарат – модели в пространстве состояний. Для простоты мы его рассмотрим на примере SISO – системы, однако дальнейший переход к многосвязности не вызовет трудностей. Аналогично при использовании матричного аппарата для задач регрессии переход от парной регрессии к многомерной не потребовал пересмотра мат. аппарата.

5. Итак, в случае SISO-системы объект можно описать передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_{m-1} p + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}$$

где $m < n$ - условие физической реализуемости системы.

6. Передаточной функции соответствует линейное ОДУ с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u$$

7. Вместо **одного** д.у. высокого порядка можно записать систему д.у., где каждое уравнение системы будет первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n}{dt} = x_{n-1} \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_{n-2} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \\ \dfrac{dx_1}{dt} = -a_1 x_1 - a_2 x_2 \cdots - a_{n-1} x_{n-1} - a_n x_n + b_0 u_0 + b_1 u_1 + \cdots + b_{m-1} u_{m-1} + b_m u_m \end{cases}$$

$u_0 = \frac{du_1}{dt}, u_1 = \frac{du_2}{dt}, \cdots, u_{m-1} = \frac{du_m}{dt}$

По поводу u не уверена, размерность (m+1).

8. В векторном виде система запишется в виде:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

9. Вектор $\bar{x}$ называется вектором состояния системы. Он включает в себя полную информацию, необходимую для предсказания дальнейшего поведения системы в зависимости от управляющего воздействия. Некоторые компоненты вектора состояния измеряются датчиками. Уравнение измерения связывает измерение y с вектором состояния.

10. Итак, в общем случае модель в пространстве состояний примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u}, & \text{уравнение системы} \\ \bar{y} = C\bar{x}, & \text{уравнение измерения} \end{cases}$$

$\bar{x}$ – $(n \times 1)$-вектор переменных состояния,
$\bar{u}$ – $(m \times 1)$-вектор управляющих воздействий,

$\bar{y}$ – $(r \times 1)$-вектор измерений.

11. *Рассмотрим переход от передаточной функции SISO-системы 2-го порядка к модели в пространстве состояний*

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2 + 2p + 2}$$

Перейдем к записи в форме обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = u$$

12. Введем вектор состояния $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Для SISO-систем его размерность равна порядку передаточной функции. Последний компонент вектора состояния просто равен параметру y, а затем каждый очередной компонент равен производной последнего заданного.

$$x_2 = y$$
$$x_1 = \frac{dx_2}{dt}$$

13. Запишем д.у. объекта во веденных обозначениях:

$$\frac{dx_1}{dt} + 2x_1 + 2x_2 = u_1$$

14. Получилось уравнение первого порядка. Окончательно запишем систему ОДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 2x_2 + u_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$$

В векторной форме

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u}$$
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \bar{u} = (u_1), A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

15. Наблюдаемым параметром вектора состояния является его второй компонент, равный y. Поэтому уравнение измерения примет вид:

$$\bar{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \bar{x}$$

Поскольку рассматривалась SISO-система, размерность вектора y равна 1. В общем случае для MIMO систем размерность y будет произвольной.

16. Поскольку MPC с технической точки зрения компьютерная программа, то для нее естественно перейти к дискретным моделям. Дискретная модель в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u_k \\ y_k = \tilde{C}x_k \end{cases}$$

Где $k = 0,1,2, \ldots$ - номер такта, определяющий дискретный момент времени $t = k\Delta t$, где Δt - шаг дискретизации.
$x_k - (n \times 1)$-вектор переменных состояния в момент времени $t = k\Delta t$,
$u_k - (m \times 1)$-вектор управляющих воздействий в момент времени $t = k\Delta t$,
$y_k - (r \times 1)$-вектор измерений в момент времени $t = k\Delta t$.

Для дискретной модели матрицы A, B, C имеют похожий смысл, однако численно они не равны аналогичным матрицам непрерывной модели!

17. Продолжим пример. Переведем модель в ПС в дискретную форму. Для этого зададимся периодом дискретизации Δt и заменим производные разностной аппроксимацией.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} \approx \dfrac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} = -2x_1(t) - 2x_2(t) + u_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} \approx \dfrac{x_2(t+\Delta t) - x_2(t)}{\Delta t} = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t+\Delta t) = (1 - 2\Delta t)x_1(t) - 2\Delta t x_2(t) + \Delta t u_1(t) \\ x_2(t+\Delta t) = \Delta t x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Перейдем к временным рядам, полученным из непрерывных сигналов дискретизацией по времени с периодом Δt.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1 - 2\Delta t)x_1(k) - 2\Delta t x_2(k) + \Delta t u_1(k) \\ x_2(k+1) = \Delta t x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

Обозначим вектор состояния дискретной модели

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Дискретная модель в пространстве состояний примет вид:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u_k \\ y_k = \tilde{C}x_k \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 - 2\Delta t & -2\Delta t \\ \Delta t & 1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} \Delta t \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Важный нюанс -

19. Можно сформулировать переход от непрерывного времени к дискретному в общем случае, используя матричный аппарат:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) = A\bar{x}_k + B\bar{u}_k \\ \bar{y}_k = C\bar{x}_k + D\bar{u}_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (I_n + \Delta t \cdot A)\bar{x}_k + \Delta t \cdot B\bar{u}_k \\ \bar{y}_k = C\bar{x}_k + D\bar{u}_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (I_n + \Delta t \cdot A), \tilde{B} = \Delta t \cdot B$$