

## Практика 2. Оптимальные задачи

### Задача безусловной минимизации. Задача минимизации с ограничениями.

#### Часть 1. Восстановление коэффициентов регрессии с помощью ММНК

1. Сгенерировать выборку на основе линейной модели идентифицированной ранее QN-характеристики насосного агрегата. Объем выборки  $n$  задать от 10 до 20.
2. Задаться  $R, Q, \beta_{\text{appr}}$ . Матрицы  $R, Q$  взять диагональными,  $\beta_{\text{appr}}$  взять произвольным. Программу устроить таким образом, чтобы изменение  $R, Q, \beta_{\text{appr}}$  учитывалось по всему коду.
3. Рассчитать ММНК-оценки вектора  $\beta$  на основе аналитического решения безусловной задачи.
4. Построить трехмерный график (surf) и график изолиний (contour) функционала качества ММНК и его. Отобразить точкой аналитическое решение (plot3)
5. На основе предыдущего пункта изучить, как изменяется график функционалов МНК, ОМНК, ММНК при изменении  $R, Q, \beta_{\text{appr}}$ . Описать, куда сдвинется минимум функционалов и как поменяется форма графиков (более вытянутый, более круглый).

#### Часть 2. Восстановление коэффициентов регрессии в случае наличия ограничений (квадратичное программирование)

1. Привести функционал ММНК к виду квадратичной формы. Посчитать конкретные матрицы  $H, f$ .
2. Убедиться, что quadprog без ограничений дает решение, совпадающее с аналитическим решением ММНК без ограничений. Вывести его на график и сравнить в числах.
3. Задать ограничения  $\beta_{\min}, \beta_{\max}$  так, чтобы хотя бы одно из них нарушалось в безусловной задаче ММНК. Записать ограничения в матричной форме  $A, b$ .
4. Посчитать решение задачи квадратичного программирования с ограничениями-неравенствами функцией quadprog.
5. Отобразить точкой решение задачи с ограничениями (plot3). На графике изолиний вывести ограничения  $\beta_{\min}, \beta_{\max}$  в виде прямых.
6. Интерпретировать корректность результата.

#### Вопросы к защите

1. Чем задача безусловной оптимизации отличается от задачи условной оптимизации? Какие из рассматриваемых в работе задач (МНК, ОМНК, ММНК, квадратичное программирование) являются условными, а какие безусловными?
2. МНК, ОМНК, ММНК
  - a. Запись МНК, ОМНК, ММНК в векторном и скалярном виде.
  - b. Что такое задача ОМНК, чем она отличается от МНК. С какой целью вводятся веса невязок? Как чисто технически их записать в виде матрицы?
  - c. Что такое задача ММНК? Трактовка ММНК как способа учета априорной информации о коэффициентах регрессии. Каков смысл матрицы  $Q$ ? Использование ММНК при обучении нейросетей
  - d. Связь с регуляризацией по Тихонову, гребневой регрессией (если излагалось на лекции)
  - e. Каков принцип поиска минимума при решении задач МНК, ОМНК, ММНК? Запись аналитического решения задачи ММНК (без вывода).
  - f. Как нужно задать  $R, Q, \beta_{\text{appr}}$ , чтобы решение задачи ММНК свелось к:
    - i. Задаче МНК
    - ii. Задаче ОМНК
3. Квадратичное программирование
  - a. Формальная запись задачи квадратичного программирования с ограничениями-неравенствами. В чем основное отличие задачи от задач \*МНК?

- b. Квадратичная форма как многомерное обобщение квадратного трехчлена. Условие наличия минимума и максимума.
4. Задача ММНК с ограничениями
- Содержательный смысл задачи ММНК с ограничениями. Трактовка ограничений как способа учета априорной информации о коэффициентах регрессии. В чем отличие от априорной информации в виде заданного  $\beta_{\text{апр}}$ ?
  - Представление задачи ММНК с ограничениями в виде задачи квадратичного программирования.
  - Запись ограничений на оценки коэффициентов регрессии в виде диапазонов  $\vec{\beta}_{\min}, \vec{\beta}_{\max}$ .
  - Почему для учета ограничений нельзя просто решить ММНК без ограничений и довести до ближайшей границы компоненты вектора оценок, которые вышли за границы? Проиллюстрировать ответ на своем 3D-графике или графике изолиний.
  - Соотнесите значения функционала  $J_{\text{ММНК}}$  в разных точках:  $J_{\text{ММНК}}(\vec{\beta})$ ,  $J_{\text{ММНК}}(\beta_{\text{гр}})$ ,  $J_{\text{ММНК}}(\beta_{\text{точ}})$  друг с другом. В какой точке функционал наибольший, в какой наименьший?