Практика 5. Оценка дисперсии как случайная величина.

Часть 1. Распределение χ^2.

1. Используя только нормальный генератор randn(), написать генератор СВ из распределения χ^2 с *k* степенями свободы.

   function x = randchi2(k, n)

   k – количество степеней свободы распределения χ^2

   n – объем генерируемой выборки

   x – вектор размерности n со случайными значениями из случайной величины χ^2
2. Выбрать количество степеней свободы 2 ≤ k ≤ 10 и, используя написанный генератор, методом Монте-Карло сгенерировать достаточно большую выборку, построить ее полигон относительных частот (hist_density).
3. На том же графике построить теоретическую плотность распределения χ^2 с выбранным числом степеней свободы. Убедиться, что графики совпадают.

Часть 2. Оценка дисперсии как случайная величина

1. Задаться объемом исследуемой выборки 3 ≤ n ≤ 6.
2. Задаться объемом выборки Монте-Карло N > 1000.
3. Сгенерировать *N* реализаций смещенной и несмещенной оценок дисперсий, рассчитанным по выборкам объема *n*. Построить полигон относительных частот обеих оценок. Визуально продемонстрировать наличие смещенности.
4. На основе N реализаций несмещенной дисперсии построить столько же реализаций величины $(n-1)\frac{S^2}{D}$. Построить полигон относительных частот. Выяснить в лекциях теоретическую плотность распределения $(n-1)\frac{S^2}{D}$ и нанести ее на тот же график. Убедиться, что графики совпадают.

Вопросы к защите

1. Что такое несмещенность оценки? При каком объеме выборке проявляется смещенность смещенной оценки дисперсии.
2. Что такое дисперсия оценки дисперсии? Как ее увеличение повлияет на полигон относительных частот оценок дисперсии? От чего она зависит?
3. Что такое матожидание оценки дисперсии. Вывести МО смещенной и несмещенной оценок дисперсии.
4. Вывести распределение оценки дисперсии при известном истинном значении МО:
$$\widehat{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - Ex)^2$$
5. Доказать смещенность оценки дисперсии:
$$\widehat{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$$

Практика 6. Стандартизированная и стьюдентизированная случайная величина.

Суть задания – сравнение распределений статистики на основе метода Монте-Карло.

1. Задаться дисперсией распределения нормальной случайной величины. МО считать равным нулю.
2. Задаться объемом исследуемой выборки $2 \le n \le 4$.
3. Задаться объемом выборки Монте-Карло N > 1000 и сгенерировать *N* выборок объема n по заданной СВ. По каждой выборке построить:
   a. средневыборочное $\bar{x}_n$
   b. стандартизованное средневыборочное *z* (поделить $\bar{x}_n$ на его истинное с.к.о.)
   c. оценку с.к.о. *s*
   d. стьюдентизированное средневыборочное t (поделить $\bar{x}_n$ на оценку его с.к.о.)

   Во всей первой части задания цикл моделирования Монте-Карло должен быть ровно один, чтобы все расчеты шли по одним и тем же выборкам. Код с нарушением этого требования не принимается.
4. Построить полигон относительных частот и теоретическое распределение $\bar{x}_n$.
5. Сравнить распределения
6. Построить полигон относительных частот и теоретическое распределение стандартизованного средневыборочного *z*
7. Построить полигон относительных частот и теоретическое распределение стьдентизированного средневыборочного *t*
8. Изменяя *n*, исследовать при каком объеме выборки распределение Стьюдента сходится к нормальному стандартному.

Вопросы к защите

1. Чем похожи и чем отличаются стьюдентизированная и стандартизированная нормальная случайная величина. Можно ли стьюдентизировать СВ, у которой распределение не нормальное?
2. Дисперсия стандартизированной СВ равна единице. Почему дисперсия стьюдентизированной СВ больше единицы?