

## Практики 7 и 9. Сравнение МО двух нормальных случайных величин Достоверность показаний зашумленных измерений

Практика является продолжением практики о зашумленных измерениях.

**Код генератора generate\_sensor\_data должен в коде фигурировать ровно один раз в этой написанной функции. Глобальные переменные в данной функции запрещены. В дальнейшем генерация измерений для обоих датчиков обязательно вызывает эту функцию, новые генераторы писать не надо. Код с нарушением этого требования не принимается.**

Части 2, 5 считаются отдельной практикой (№9). Их можно выполнять отдельно и позже, после изложения  $t$ -статистики на лекциях.

### Часть 1. Функции проверки гипотез в случае известных дисперсий

1. Реализовать функцию расчета статистики  $e$  и  $z$  по двум выборкам  $P1, P2$ :

```
function e = e_statistic(P1, P2)
```

```
function z = z_statistic(P1, P2, D1, D2)
```

Результатом обеих функций являются скалярные величины  $e, z$ , учитывающие усреднение по выборке. Формулы расчета обеих статистик должны в коде фигурировать ровно один раз в этих функциях. Глобальные переменные в данных функциях запрещены. В дальнейшем при расчете статистик  $e, z$  обязательно вызывать эти функции. Код с нарушением этого требования не принимается.

2. Осознать, почему на входе функции расчета  $e$ -статистики не нужны дисперсии случайных составляющих погрешности, а  $z$ -статистики нужны. Осознать, почему не передается объем выборки  $n$ .
3. Реализовать функцию проверки гипотезы о равенстве МО двух СВ на основе статистик  $e$  и  $z$ .

```
function [h, border_low, border_high] = test_equal_means_e(e, D1, D2, n, alpha)
```

```
function [h, border_low, border_high] = test_equal_means_z(z, alpha)
```

$h$  – результат проверки гипотезы

$border\_low, border\_high$  – границы области принятия основной гипотезы по  $e$  или  $z$  статистикам.

**Далее везде в коде для проверки гипотез использовать только эти функции. Код с нарушением этого требования не принимается.**

4. Осознать, почему в функции расчета  $e$ -статистики не нужны дисперсии случайных составляющих погрешности, а для  $z$ -статистики нужны.

### Часть 2. Функции проверки гипотез в случае неизвестных дисперсий на основе $t$ -статистики

1. В дополнение к функциям `e_statistic`, `z_statistic` реализовать функцию расчета  $t$ -статистики  $e$  и  $z$  по двум выборкам  $P1, P2$ :

```
function t = t_statistic(P1, P2)
```

Результатом функции является скалярная величина  $t$ , учитывающая усреднение по выборке. Формулы расчета обеих статистик должны в коде фигурировать ровно один раз в этих функциях. Глобальные переменные в данных функциях запрещены. В дальнейшем при расчете статистик  $e, z$  обязательно вызывать эти функции. Код с нарушением этого требования не принимается.

2. Осознать, почему на входе функции расчета  $e$ -статистики не нужны дисперсии случайных составляющих погрешности, а  $z$ -статистики нужны. Осознать, почему не передается объем выборки  $n$ .
3. В дополнение к функциям `test_equal_means_e`, `test_equal_means_z` реализовать функцию проверки гипотезы о равенстве МО двух СВ на основе статистики  $t$ .

```
function [h, border_low, border_high] = test_equal_means_t(t, n, alpha)
```

$n$  – объем выборки, по которому посчитана статистика  $t$ ,

$h$  – результат проверки гипотезы,

$border\_low$ ,  $border\_high$  – границы области принятия основной гипотезы по  $t$ -статистике.

**Далее везде в коде для проверки гипотез использовать только эту функцию. Код с нарушением этого требования не принимается.**

4. Осознать, чем отличается  $t$ -статистика от  $z$ -статистики.

### **Часть 3. Распределения статистик в условиях $H_0$ и $H_1$**

1. Задаться объемом измерительной выборки  $5 < n < 20$ .
2. Генерируя  $e$ -статистику по **выборкам из `generate_sensor_data`**, на **одном графике** построить:
  - a. теоретическую плотность распределения статистики Критерия в условиях основной гипотезы (показания датчиков «в среднем» равны, отличия обусловлены случайной составляющей погрешности и носят чисто случайный характер);
  - b. теоретическая плотность распределения статистики Критерия в условиях альтернативной гипотезы;
  - c. в тех же условиях методом статистического моделирования Монте-Карло ( $N \geq 1000$ ) построить полигон относительных частот статистики Критерия (`hist_density`);
  - d. методом статистического моделирования ( $N \geq 1000$ ) построить полигон относительных частот статистики Критерия при условии альтернативной гипотезы;
  - e. осознать, чем отличается  $n$  от  $N$ .
3. Построить то же самое для статистики  $z$ .
4. Построить то же самое для статистики  $t$ .
5. На построенные в этой части задания графики (их должно быть три) нанести нижнее и верхнее пороговые значения для принятия или отклонения основной гипотезы. Пороги брать из функций `test_equal_means_e`, `test_equal_means_z`, `test_equal_means_t`.
6. Подобрать  $n$ , на котором визуально видна разница между  $t$ -статистикой и  $z$ -статистикой. В чем она заключается?

### **Часть 4. Исследование статистических свойств критериев $e$ , $z$**

1. Задаться объемом измерительной выборки  $5 < n < 20$ .
2. Методом Монте-Карло оценить ошибку **первого** рода при принятии гипотезы о равенстве МО нормальных СВ на основе  $e$ -статистики.  
Для этого сгенерировать  $N \geq 1000$  реализаций  $e$ -статистики в условиях основной гипотезы и посчитать долю случаев, в которых функция `test_equal_means_e` принимает альтернативную гипотезу.
3. Аналогичным образом оценить ошибку **второго** рода при принятии гипотезы о равенстве МО нормальных СВ на основе  $e$ -статистики
4. Посчитать ошибки первого и второго рода для  $z$ -статистики.
5. Увеличить объем измерительной выборки  $n$  в два раза. Проверить ошибки первого и второго рода. Обосновать их изменение или, наоборот, неизменность.

### **Часть 5. Исследование ошибок первого и второго рода для статистик $t$ и $z$**

1. Методом статистического моделирования исследовать ошибки первого и второго рода в зависимости от объема выборки для  $z$ -статистики и  $t$ -статистики.  
Для этого построить графики ошибок 1-го, 2-го рода в зависимости от объема выборки  $n$  для  $z$ -статистики и  $t$ -статистики. Все 4 графика построить на одном, объяснить, чем вызвано их отличие.
2. Методом статистического моделирования исследовать ошибку первого и второго рода в зависимости от близости систематических погрешностей датчиков.

Для этого построить графики ошибок 1-го, 2-го рода в зависимости от разницы систематических погрешностей для z-статистики и t-статистики. Все 4 графика построить на одном, объяснить, чем вызвано их отличие.

3. Задаться требуемыми ошибками первого и второго рода (не обязательно одинаковыми), определить по построенным графикам
  - a. объемы выборки, при котором эти ошибки будут обеспечены.
  - b. разницу систематических погрешностей, которую можно выявить с такими ошибками

#### Вопросы к защите

1. Вероятностная модель измерения двумя датчиками одного физического параметра.
  - a. Записать вероятностную модель генератора сигнала датчика «до измерений» с учетом истинного значения параметра, аналитически вывести его МО, дисперсию. Вывести МО, дисперсию для разницы показаний датчиков.
  - b. Эскиз графика матожидания показаний датчика от времени.
  - c. Определение случайного процесса. Почему сигналы датчиков являются случайным процессами? Определение стационарного случайного процесса. Являются ли они стационарными? Те же вопросы для разницы показаний датчиков.
2. Распределения статистик критерия
  - a. e-статистика
    - i. Формула расчета усредненной статистики  $\bar{e}_n$  по скользящему окну по двум временным рядам показаний датчиков.
    - ii. Вывести МО, дисперсию  $\bar{e}_n$  в общем случае.
    - iii. Вывести распределения статистики  $\bar{e}_n$  в условиях основной и альтернативной гипотезы. Как связана дисперсия средневывборочного с дисперсией исходной СВ?
    - iv. Привести эскизы графиков плотности распределения  $\bar{e}_n$ -статистики в условиях основной и альтернативной гипотезы. Как выглядят эти график для e-статистики без усреднения.
    - v. В каком случае график плотности распределения в условиях альтернативной гипотезы слева и в каком случае справа?
  - b. z-статистика
    - i. Формула расчета статистики  $z_n$ .
    - ii. Вывести МО, дисперсию  $z_n$  в общем случае.
    - iii. Вывести распределения статистики  $z_n$  в условиях основной и альтернативной гипотезы.
    - iv. Привести эскизы графиков плотности распределения  $z_n$ -статистики в условиях основной и альтернативной гипотезы.
    - v. В каком случае график плотности распределения в условиях альтернативной гипотезы слева и в каком случае справа?
  - c. Влияющие факторы:
    - i. Как меняются графики плотностей распределения при изменении следующих факторов:
      1. Объема выборки
      2. Разницы показаний
      3. Дисперсии случайной составляющей погрешности
    - ii. Какой из этих трех факторов можно на практике изменять произвольно?
  - d. Почему в функции расчета e-статистики не нужны дисперсии случайных составляющих погрешности, а для z-статистики нужны?
3. Проверка гипотез
  - a. Определения
    - i. Что такое статистическая гипотеза?

- ii. Формулировка основной и альтернативной гипотезы данной работы.
  - iii. Что такое статистика критерия? Какие статистики использовались в данной работе?
  - iv. Что такое критическая область и область принятия гипотезы?
  - v. Что такое простая и сложная гипотеза? Какая из двух рассматриваемых гипотез является простой, а какая сложной?
- b. Ошибки 1-го и 2-го рода
- i. Что такое ошибка первого и второго рода? Как посчитать ошибку первого и второго рода для  $e$  и  $z$ -статистик, зная плотности распределения статистик в условиях основной и альтернативных гипотез? Что такое мощность критерия?
  - ii. У какой из статистик  $e$ ,  $z$  ошибка второго рода меньше? Ответ проверить по значениям ошибок второго рода данного задания.
  - iii. Почему не меняется ошибка первого рода при изменении объема выборки?
  - iv. Как влияет объем выборки на ошибку второго рода? Ответ обосновать по эскизам распределений  $e$  и  $z$ -статистик, нарисованных ранее.
  - v. Как посчитать ошибку второго рода для  $e$ -статистики без усреднения? В какую сторону она будет отличаться от ошибки усредненной  $e$ -статистики?
  - vi. Зачем применяется усреднение при расчете  $e$ -статистики? В чем выигрыш от применения усреднения?
- c. Расчет порогов при заданном уровне значимости
- i. Как связаны плотность распределения вероятности и функция распределения вероятности.
  - ii. Что такое инверсная функция распределения вероятностей? Как с ее помощью посчитать пороги для  $e$ ?
4. Вопросы по  $t$ -статистике
- a. Сформулировать основную и альтернативную гипотезы, которые проверялись с помощью  $t$ -статистики.
  - b. Формула расчета  $t$ -статистики. Чем она отличается от формулы  $z$ -статистики?
  - c. Почему расчет  $t$ -статистики корректен, несмотря на нестационарность измерительных временных рядов  $P_1$ ,  $P_2$ ?
  - d. Какое распределение у  $t$ -статистики в условиях основной и альтернативной гипотезы? Какие распределения у  $z$ -статистики в этих же условиях.
  - e. Нарисовать эскиз, демонстрирующий отличия между этими статистиками?
  - f. Чем расчет порогов  $t$ -статистики отличается от расчета порогов  $z$ -статистики?
  - g. Что будет, если пороги для  $t$ -статистики считать так, как будто, это  $z$ -статистика? Что в этом случае произойдет с ошибками 1-го и 2-го рода?
  - h. Как соотносятся ошибки второго рода  $z$ - и  $t$ -статистик при одном и том же объеме выборки?
  - i. Какие факторы влияют на ошибки первого и второго рода (должно быть 3 фактора)? В какую сторону изменяются ошибки 1-го, 2-го рода при увеличении/уменьшении этих факторов? Чтобы подготовить ответ, вспомните эксперименты с  $e$ ,  $z$ ,  $t$ -статистиками из двух ДЗ. Какой из этих факторов можно менять
  - j. Какой показатель (показатели) самый важный для работы системы контроля достоверности датчиков?
  - k. Как выбрать объем выборки, учитывая, что с технической точки зрения лучше ее взять меньше, чтобы уменьшить время сбора показаний датчиков для анализа.
  - l. Можно ли воспользоваться  $t$ -статистикой, если известны дисперсии случайных составляющих погрешности?

- m. Почему лучше использовать z-статистику, если известны дисперсии случайных составляющих?
- n. В каких случаях невозможно использовать z-статистику, но можно t-статистику?
- o. В каких случаях нельзя использовать z-статистику и t-статистику?
- p. Что лучше: z-статистика или t-статистика?