

Практика 11. Оптимальные задачи

Задача безусловной минимизации. Задача минимизации с ограничениями.

Часть 1. Восстановление коэффициентов регрессии с помощью ММНК

1. Сгенерировать выборку на основе линейной модели идентифицированной ранее QN-характеристики насосного агрегата. Объем выборки n задать от 10 до 20.
2. Задаться $R, Q, \beta_{\text{appr}}$. Матрицы R, Q взять диагональными, β_{appr} взять произвольным. Программу устроить таким образом, чтобы изменение $R, Q, \beta_{\text{appr}}$ учитывалось по всему коду.
3. Рассчитать ММНК-оценки вектора β на основе аналитического решения безусловной задачи.
4. Построить трехмерный график (surf) и график изолиний (contour) функционала качества ММНК и его. Отобразить точкой аналитическое решение (plot3)
5. На основе предыдущего пункта изучить, как изменяется график функционалов МНК, ОМНК, ММНК при изменении $R, Q, \beta_{\text{appr}}$. Описать, куда сдвинется минимум функционалов и как поменяется форма графиков (более вытянутый, более круглый).

Часть 2. Восстановление коэффициентов регрессии в случае наличия ограничений (квадратичное программирование)

1. Привести функционал ММНК к виду квадратичной формы. Посчитать конкретные матрицы H, f .
2. Убедиться, что quadprog без ограничений дает решение, совпадающее с аналитическим решением ММНК без ограничений. Вывести его на график и сравнить в числах.
3. Задать ограничения $\beta_{\min}, \beta_{\max}$ так, чтобы хотя бы одно из них нарушалось в безусловной задаче ММНК. Записать ограничения в матричной форме A, b .
4. Посчитать решение задачи квадратичного программирования с ограничениями-неравенствами функцией quadprog.
5. Отобразить точкой решение задачи с ограничениями (plot3). На графике изолиний вывести ограничения $\beta_{\min}, \beta_{\max}$ в виде прямых.
6. Интерпретировать корректность результата.

Вопросы к защите

1. Чем задача безусловной оптимизации отличается от задачи условной оптимизации? Какие из рассматриваемых в работе задач (МНК, ОМНК, ММНК, квадратичное программирование) являются условными, а какие безусловными?
2. МНК, ОМНК, ММНК
 - a. Запись МНК, ОМНК, ММНК в векторном и скалярном виде.
 - b. Что такое задача ОМНК, чем она отличается от МНК. С какой целью вводятся веса невязок? Как чисто технически их записать в виде матрицы?
 - c. Что такое задача ММНК? Трактовка ММНК как способа учета априорной информации о коэффициентах регрессии. Каков смысл матрицы Q ? Использование ММНК при обучении нейросетей
 - d. Связь с регуляризацией по Тихонову, гребневой регрессией (если излагалось на лекции)
 - e. Каков принцип поиска минимума при решении задач МНК, ОМНК, ММНК? Запись аналитического решения задачи ММНК (без вывода).
 - f. Как нужно задать $R, Q, \beta_{\text{appr}}$, чтобы решение задачи ММНК свелось к:
 - i. Задаче МНК
 - ii. Задаче ОМНК
3. Квадратичное программирование
 - a. Формальная запись задачи квадратичного программирования с ограничениями-неравенствами. В чем основное отличие задачи от задач *МНК?

- b. Квадратичная форма как многомерное обобщение квадратного трехчлена. Условие наличия минимума и максимума.
4. Задача ММНК с ограничениями
- Содержательный смысл задачи ММНК с ограничениями. Трактовка ограничений как способа учета априорной информации о коэффициентах регрессии. В чем отличие от априорной информации в виде заданного $\beta_{\text{апр}}$?
 - Представление задачи ММНК с ограничениями в виде задачи квадратичного программирования.
 - Запись ограничений на оценки коэффициентов регрессии в виде диапазонов $\vec{\beta}_{\min}, \vec{\beta}_{\max}$.
 - Почему для учета ограничений нельзя просто решить ММНК без ограничений и довести до ближайшей границы компоненты вектора оценок, которые вышли за границы? Проиллюстрировать ответ на своем 3D-графике или графике изолиний.
 - Соотнесите значения функционала $J_{\text{ММНК}}$ в разных точках: $J_{\text{ММНК}}(\vec{\beta})$, $J_{\text{ММНК}}(\beta_{\text{гр}})$, $J_{\text{ММНК}}(\beta_{\text{точ}})$ друг с другом. В какой точке функционал наибольший, в какой наименьший?